Hertentamen Fouriertheorie. 4 febr.'03, 9:00, Examenhal

(1) De funkties $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ worden gegeven door
$f_n(x) = (\cos x)^n + (\sin x)^n$.
(a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ bijna overal geldt op $[0, 2\pi]$.
(b) Volgens welke stelling(en) is $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 0$?

(2) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling van $\mathbf{R}^m$.
(b) Geef de definitie van een integreerbare functie $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

(3) Bewijs dat de verzameling $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 = x_2^2\}$ Lebesque maat nul heeft. Welke stelling(en) gebruikt U?

(4) E bestaat uit de rijtes $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ met alle $a_i \in \mathbf{R}$ en met $\lim a_i = 0$. Definiëer $\|a\| = \sup\{|a_i| \mid i \geq 1\}$. Bewijs dat E een vectorruimte is, dat $\| \;\|$ een norm is en dat E, voorzien van die norm, een Banach ruimte is.

(5) Geef de definitie van $\mathcal{L}^i([0,1])$ voor $i = 1, 2$. Geef een voorbeeld van een f met $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$ en $f \notin \mathcal{L}^1([0,1])$.

(6) Formuleer Dirichlets stelling over convergentie van Fourierreeksen.

(7) Bewijs dat de Fourierreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} e^{inx}$ uniform convergeert naar een continue differentieerbare funktie $R : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$.

(8) $f(x)$ is de 2π-periodieke funktie die voldoet aan $f(x) = x$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Bereken de Fourierreeks R van f. Voor welke x geldt $R(x) = f(x)$?

(9) $b > a > 0$ en $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ wordt gegeven door $f(x_1, \ldots, x_m) = 1$ als $a < x_i < b$ voor alle i, en $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ voor andere waarden van $(x_1, \ldots, x_m)$. Bereken $\mathcal{F}(f)$.

(10) $f(x) := xe^{-\pi x^2}$. Bereken $\|f\|_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.